

14/04/2022

METODI ENERGETICI

QUESTO NUOVO APPROCCIO SI BASA SU UN BILANCIO TRA LE ENERGIE DETERMINATE DAL MOVIMENTO DEL SISTEMA, NEL TEMPO

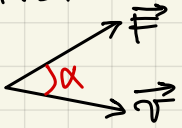
POTENZA DI UNA FORZA/MOMENTO

$$W = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad [W] = [J/s]$$

↓
PRODOTTO SCALARE

→ ENERGIA

È UNA QUANTITÀ SCALARE: SE NON PARALLELO, VA TENUTO CONTO DELL'ANGOLO COMPRESO



PER UNA COPPIA (MOMENTO):

$$W = \vec{C} \cdot \vec{\omega}$$

↓
COPPIA ↓
VEL. ANGOLARE

NEL MOTO PIANO SAPPIAMO ESSERE PARALLELI (VARIA SEGNO)

ENERGIA CINETICA

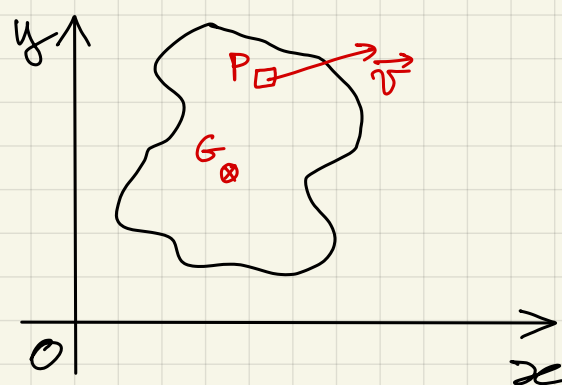
- DEL PUNTO MATERIALE:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{SCALARE})$$

↓

FORMALMENTE: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

TEOREMA DI KÖNIG (CORPO RIGIDO):



OGNI PUNTO HA VELOCITÀ DIVERSA!
IN P:

$$\begin{aligned} dE_c &= \frac{1}{2} dm \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = \\ &= \frac{1}{2} \rho dV \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P dV \quad (\text{CASO DI UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI, SI SOMMANO})$$

VALE RIVALS, PER IL GENERICO P:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (\vec{P} - \vec{G})$$

↓
BARI CENTRO → DEL CORPO

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_c &= \frac{1}{2} \int_V \rho [\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}-\mathbf{G})] \cdot [\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}-\mathbf{G})] dV \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\vec{v}_G \cdot \vec{v}_G}_{m} \int_V \rho dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \vec{v}_G \cdot [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}-\mathbf{G})] dV + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_V \rho [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}-\mathbf{G})] \cdot \vec{v}_G dV + \frac{1}{2} \int_V \rho [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}-\mathbf{G})] \cdot [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}-\mathbf{G})] dV \\
\Rightarrow E_c &= \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} \vec{v}_G \cdot \underbrace{\left[\vec{\omega} \wedge \int_V \rho (\mathbf{P}-\mathbf{G}) dV \right]}_{\substack{\text{POSIZIONE DEL} \\ \text{BARICENTRO} \\ \text{RISPETTO A SÈ STESSO}}} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\left[\omega \wedge \int_V \rho (\mathbf{P}-\mathbf{G}) dV \right]}_{\text{COME PRIMA}} \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int_V \rho (\mathbf{P}-\mathbf{G})^2 dV}_{\substack{\text{MOMENTO D'INERZIA} \\ \text{RISPETTO AL BARICENTRO} \\ \text{DEL C.R. (J}_G)}}
\end{aligned}$$

PER IL SINGOLO CORPO,

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} J_G \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

DATO UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI, SI PUÒ SCRIVERE:

$$\underbrace{\sum W}_{\substack{\text{SOMMATORIA} \\ \text{DI TUTTE LE} \\ \text{POTENZE DI} \\ \text{FORZE E} \\ \text{COPPIE}}} = \underbrace{\frac{dE_c}{dt}}_{\substack{\text{VARIAZIONE} \\ \text{DI ENERGIA} \\ \text{CINETICA}}}$$

SUI VINCOLI, ABBIAMO DETTO:

IPOTESI:

- OLONOMI
 - LISCI
 - BILATERALI
- LA POTENZA ASSOCIATA A TUTTE LE REAZIONI VINCOLARI $\vec{F} = 0$ ($= 0$ È RISPETTO A TERRA / O REL TRA I DUE CORPI)

$\Rightarrow \Sigma W =$ SOMMATORIA DELLE POTENZE
DELLE SOLE FORZE/COPPIE ATTIVE

ATTENZIONE: QUI STO SCRIVENDO UNA SOLA
EQUAZIONE! TROVERÒ UNA SOLA
INCOGNITA (SE NON ASSOCIATA AD
ALTRO)

NON LA SI PUÒ POI USARE PER TROVARE REAZIONI
VINCOLARI (NON COMPARE)
DI CONTRO, LE SI POSSONO IGNORARE

BILANCIO DI POTENZE

SVILUPPIAMO I TERMINI:

(FORZE/COPPIE E PUNTI DI APPLICAZIONE)

$$\uparrow \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_j \vec{C}_j \cdot \vec{\omega}_j = \sum_k \frac{dE_k}{dt} = \sum_k (\underbrace{m \vec{v}_k \cdot \vec{a}_k}_{\text{ATTENZIONE!}} + J_k \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{\omega}})$$

$$= \dot{V}_G \Delta G t$$

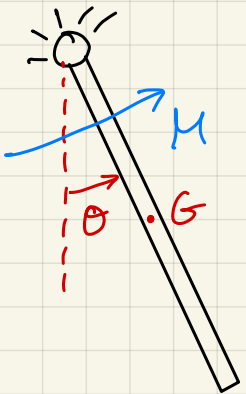
POSSO RICONDURMI A:

$$\underbrace{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i}_{\substack{\text{POTENZA} \\ \text{FORZE} \\ \text{ATTIVE}}} + \underbrace{\sum_j \vec{C}_j \cdot \vec{\omega}_j}_{\substack{\text{POTENZA} \\ \text{COPPIE} \\ \text{ATTIVE}}} - \underbrace{\sum_k (\underbrace{m \vec{a}_k \cdot \vec{v}_k}_{\substack{\text{FORZA} \\ \text{D'INERZIA} \\ \vec{F}_{im}}} + \underbrace{J_k \vec{\omega}_k \cdot \dot{\vec{\omega}}_k}_{\substack{\text{COPPIA} \\ \text{D'INERZIA} \\ \vec{C}_{im}}})}_{\text{POTENZE}} = 0$$

K CORPI

ESEMPIO

SIA DATA UN'ASTA OMOGENEA (BARICENTRO IN MEZZO)



NOTI:

$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ (POSITIVI ANTICLOCKWISE)

m, J_G, L

TROVARE M PER GARANTIRE

LA CONDIZIONE DI MOTO

ASSEGNAZIONE (DINAMICA INVERSA)

IL SISTEMA È POSTO NEL PIANO

VERTICALE (VA CONSIDERATA

ANCHE FORZA PESO) $\rightarrow$ SCHEMATIZZ. RISPETTO A g

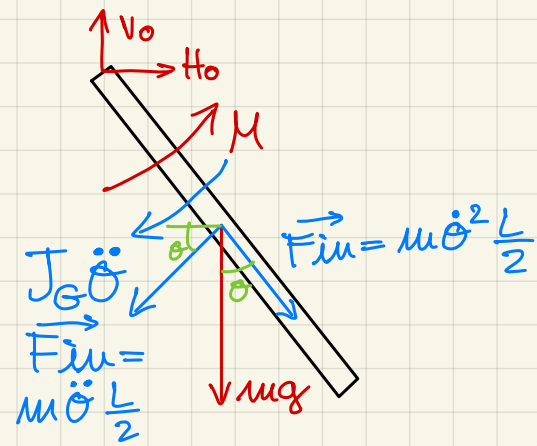
1 g.d.l. COMPLESSIVO

RAPPRESENTO FORZE/COPPIE:

EVIDENZIARE FORZE/COPPIE
D'INERZIA

OPPOSTA W

NEL BARICENTRO



RICAVIAMO (RIVALS):

$$\vec{v}_G = \dot{\theta} \lambda (G-O) \quad \text{(TANGENZIALE)}$$

$$a_G = \ddot{\theta} \lambda (G-O) - \dot{\theta}^2 (G-O)$$

TANGENZIALE CENTRIFUGO

$$|\vec{v}_G| = \dot{\theta} \frac{L}{2}$$

$$a_G: \begin{cases} \ddot{\theta} \frac{L}{2} & \vec{e} \\ \dot{\theta}^2 \frac{L}{2} & \vec{m} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{F}_{in}$ SARÀ OPPOSTA A COMPONENTE
TANGENZIALE VELOCITÀ
L'ALTRA COMPONENTE SARÀ NORMALE

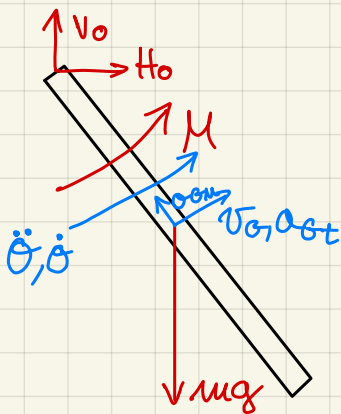
COMINCIAMO CON D'ALEMBERT:

$$\begin{cases} H_0 - m \ddot{\theta} \frac{L}{2} \cos \theta + m \dot{\theta}^2 \frac{L}{2} \sin \theta = 0 \Rightarrow H_0 = \dots \\ V_0 - mg - m \ddot{\theta} \frac{L}{2} \sin \theta - m \dot{\theta}^2 \frac{L}{2} \cos \theta = 0 \Rightarrow V_0 = \dots \\ M - J_G \ddot{\theta} - m \ddot{\theta} \frac{L}{2} \frac{L}{2} - mg \frac{L}{2} \sin \theta = 0 \Rightarrow M = \dots \end{cases}$$

BRACCIO

INTORNO A O
(POTREMO RISPARECIARCI H_0 E V_0)

USIAMO ORA IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA:



$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} J \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = m v_G a_{Gt} + J \dot{\theta} \ddot{\theta} = m \frac{L^2}{4} \dot{\theta} \ddot{\theta} + J \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$W = \vec{M} \cdot \dot{\theta} + m \vec{g} \cdot \vec{v}_G = M \dot{\theta} + mg \dot{\theta} \frac{L}{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

NO REAZIONI
VINCOLARI,
NO F_{in}

L'E UGUAGLIO:

$$m\cancel{\phi} - mg\cancel{\phi}\frac{L}{2}\sin\theta = m\frac{L^2}{4}\cancel{\phi}\ddot{\theta} + J\cancel{\phi}\ddot{\theta}$$

ABBIAMO OTTENUTO L'EQU. DEI MOMENTI DI PRIMA!